Ứng dụng của tích phân

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 20 tháng 11 năm 2025

Tổng giá trị

Tích phân là tổng, vì vậy mỗi khi có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

Nếu tại mỗi điểm x_i, $1 \leq i \leq n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng đó là:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Nếu tập hợp D chứa các điểm đang xét là vô hạn thì hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có khi được gọi là hàm mật độ của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là

$$\int_D f.$$

Ví dụ

Điện tích phân bố trên mảnh kim loại hình chữ nhật $[0,1]\times[0,2]$ *theo công thức* $\rho(x,y)=1000xy$*. Hãy tính lượng điện tích có trên mảnh này.*

Tổng lượng điện tích có trên mảnh là:

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]}\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\int_0^2 1000xy\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x\\ &= 1000\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^2 y\,\mathrm{d}y\right)\\ &= 1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2\\ &= 1000.\end{aligned}$$



Giá trị trung bình

Nếu tại các điểm x_i, $1 \leq i \leq n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ thì giá trị trung bình tại các điểm này là:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Nếu tập hợp D chứa các điểm đang xét có vô hạn phần tử thì giá trị trung bình của f được cho bởi công thức:

$$\frac{1}{|D|}\int_D f.$$

Ví dụ

Nhiệt độ tại điểm (x, y) *trên mặt phẳng được cho bởi phương trình*

$$f(x, y) = 50e^{-x^2-y^2} \text{ (độ Celcius).}$$

Hãy tìm nhiệt độ trung bình trên đĩa tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ.

Gọi D là đĩa tròn đơn vị tâm O, có phương trình $x^2 + y^2 \leq 1$. Nhiệt độ trung bình trên D là:

$$\frac{1}{|D|} \iint_D 50e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 50e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 50\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Ở đây, ta sử dụng phép đổi biến, đưa về tọa độ cực để tính tích phân. □

Ví dụ

Khu trung tâm thành phố được miêu tả như một hình tam giác với các đỉnh tại $(0,0)$, $(2,0)$ *và* $(0,3)$ *(đơn vị chiều dài là kilomét). Giá đất trong khu vực này được mô hình hóa bằng hàm* $p(x,y) = 3x + 2y + 1$ *(trăm triệu đồng/m*^{2}*, nghĩa là* 10^6 *triệu đồng/km*^{2}*). Hãy tính giá đất trung bình ở khu vực này.*

Các đỉnh $(0,0)$, $(2,0)$ và $(0,3)$ tạo thành tam giác D bao bởi hai trục tọa độ theo chiều dương và đường thẳng $3x + 2y = 6$.

Giá đất trung bình ở khu vực này là giá trị trung bình của hàm p trên miền D và bằng $\frac{1}{|D|} \iint_D p$.

Diện tích tam giác D là $|D| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$. Ta xem D là miền đơn giản theo chiều trục y nên:

$$\frac{1}{|D|} \iint_D p = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(\int_0^{3-\frac{3}{2}x} (3x + 2y + 1) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 5.$$

Vậy, giá đất trung bình của khu vực này là 5 trăm triệu đồng/m^2. □

Tâm khối lượng

Trong trường hợp hai chất điểm có khối lượng m_1 tại điểm p_1 và có khối lượng m_2 tại điểm p_2 thì tâm khối lượng của hệ hai điểm này, theo nguyên tắc đòn bẩy của vật lý, nằm tại điểm:

$$\frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m_1 + m_2}.$$

Tổng quát hóa cho hệ gồm n chất điểm, vị trí của tâm khối lượng là:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

với tổng khối lượng là $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Xét trường hợp khối lượng liên tục và giả sử ta có một khối vật chất chiếm phần không gian E trong $\mathbb{R}^3$.

Tại mỗi điểm $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, gọi $\rho(p)$ là mật độ khối lượng của khối tại p, đó là giới hạn của khối lượng trung bình quanh điểm p, có thể hiểu là khối lượng tại điểm p.

Khối lượng của khối chính là tích phân của mật độ khối lượng:

$$m = \int_E \rho.$$

Vị trí của tâm khối lượng trong trường hợp liên tục sẽ là

$$\frac{\int_E \rho p}{\int_E \rho} = \frac{\int_E \rho p}{m}.$$

Ở đây, tích phân của hàm vectơ được hiểu là tích phân của từng thành phần. Một cách cụ thể, nếu ta có điểm $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thì tâm khối lượng nằm ở điểm:

$$\frac{1}{m}\left(\int_E \rho x, \int_E \rho y, \int_E \rho z\right).$$

Ví dụ

Tìm tâm khối lượng của nửa hình tròn đồng chất.

Gọi D là nửa trên của hình tròn tâm O bán kính R và gọi hằng số ρ là mật độ khối lượng của nó.

Khối lượng của khối này là:

$$m = \iint_D \rho \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^\pi \rho r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \rho\pi \frac{R^2}{2} = \frac{\rho\pi R^2}{2}.$$

Tọa độ của tâm khối này là:

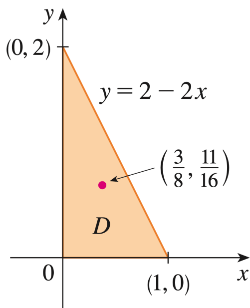
$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D \rho x \, \mathrm{d}A = \frac{2\rho}{\rho\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r\cos\theta \cdot r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D \rho y \, \mathrm{d}A = \frac{2\rho}{\rho\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r\sin\theta \cdot r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \frac{4R}{3\pi}.$$



Ví dụ

Tìm khối lượng và tâm của một hình tam giác với các đỉnh tại $(0,0)$, $(1,0)$, *và* $(0,2)$ *có hàm mật độ là* $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.



Gọi D là hình tam giác có cách đỉnh tại $(0,0)$, $(1,0)$, và $(0,2)$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm $(0,2)$ và $(1,0)$ là $y = 2 - 2x$. Ta có:

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2 - 2x\},$$

nên khối lượng cần tính là:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D (1 + 3x + y)\,\mathrm{d}A \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Tọa độ tâm của vật là:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m}\iint_D x(1+3x+y)\,\mathrm{d}A \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(x+3x^2+xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}, \\
\bar{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y(1+3x+y)\,\mathrm{d}A \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(y+3xy+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$



Xác suất của sự kiện ngẫu nhiên

Một biến ngẫu nhiên X (random variable) **là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào** $\mathbb{R}$. Trong trường hợp tập giá trị D của X là hữu hạn thì ta nói X là một biến ngẫu nhiên rời rạc.

Với mỗi giá trị $x \in D$ có một số thực $0 \leq f(x) \leq 1$ là xác suất để X có giá trị x, ký hiệu là $P(X = x)$.

Khi đó, hàm f được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X. Xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Ta phải có $\sum_{x \in D} f(x) = P(X \in D) = 1$.

Giá trị trung bình (mean) hay kỳ vọng (expected value) theo xác suất của X được cho bởi

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f(x).$$

Ví dụ: Trò chơi xúc sắc

Người chơi phải trả 20 nghìn đồng cho mỗi lần tung xúc sắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 nghìn đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 nghìn đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi X là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc sắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Như vậy,

$$X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = 10 \quad \text{và} \quad X(6) = 60.$$

Tập giá trị $D = \{10, 60\}$.

Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là: với mỗi $x \in D$ thì:

$$f(10) = \frac{5}{6} \quad \text{và} \quad f(60) = \frac{1}{6}.$$

Để xác định được trong trò chơi này ai được lợi thì ta cần tính xem số tiền trung bình nhận được là bao nhiêu và so sánh với chi phí phải trả cho mỗi lần tung xúc sắc.

Nếu giá trị này lớn hơn 20 thì người chơi được lợi, và nếu nhỏ hơn 20 thì người tổ chức được lợi. Giá trị trung bình là

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f(x) = 10 \cdot \frac{5}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20,$$

nên người tổ chức được lợi.

Khi biến ngẫu nhiên là liên tục

Nếu biến ngẫu nhiên X là *liên tục*, tập giá trị D của biến ngẫu nhiên X là một tập con vô hạn D của $\mathbb{R}$. Tương tự với trường hợp rời rạc, ta có một hàm mật độ xác suất (p.d.f, probability density function) $f : D \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq 0$.

Ngoài ra, xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \int_C f.$$

Ta cũng cần hàm mật độ xác suất thỏa:

$$P(X \in D) = \int_D f = 1.$$

Giá trị trung bình (hay kỳ vọng) của biến ngẫu nhiên X là:

$$E(X) = \int_D xf.$$

Ví dụ: Phân bố đều (uniform distribution) trong $[a, b]$

Gọi X là biến ngẫu nhiên cho một số thực trong khoảng $[a, b]$.

Vì X liên tục nên với $x \in [a, b]$, ta không thể xét $P(X = x)$ vì $P(X = x) = 0$, nghĩa là xác suất xảy ra tại một trường hợp trong vô số các trường hợp là 0.

Thay vào đó, ta xét $P(X \leq x) = P(X < x)$, và hàm mật độ xác suất của một phân bố đều trên $[a, b]$ là:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{nếu } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{nếu } x < a \vee x > b. \end{cases}$$

Ở đây, giá trị tại đầu mút $[a, b]$ không quan trọng vì không ảnh hưởng đến kết quả tích phân.

Ví dụ

Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực $t \geq 0$ là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất theo năm.

Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$. Tính xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành và kiểm tra $f(t)$ là một hàm xác suất. Hỏi trung bình sau bao lâu thì sản phẩm hư?

Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành là:

$$P(0 \leq T \leq 2) = \int_0^2 0{,}1e^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t \approx 18\%.$$

Tập giá trị là $[0, \infty)$ và hàm mật độ xác suất thỏa

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty 0{,}1e^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to\infty} \int_0^h 0{,}1e^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Thời điểm hư hỏng trung bình của sản phẩm là giá trị trung bình của xác suất hay kỳ vọng, được cho bởi

$$\int_0^\infty t \cdot 0{,}1e^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to\infty} \int_0^h t \cdot 0{,}1e^{-0{,}1t}\,\mathrm{d}t = 10.$$



Khi có nhiều hơn 1 biến ngẫu nhiên

Nếu có n biến ngẫu nhiên thì tập giá trị của biến ngẫu nhiên là một tập con của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, hàm phân bố xác suất sẽ là hàm n biến, và *các tích phân trên sẽ là tích phân bội.*

Cụ thể, hàm mật độ xác suất $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa

$$\int_D f = 1.$$

Với biến ngẫu nhiên $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ thì giá trị trung bình hay kỳ vọng của X là:

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)) = \left(\int_D x_1 f, \int_D x_2 f, \ldots, \int_D x_n f \right).$$

Công thức này tương tự như công thức tâm khối lượng.

Ví dụ

Xét tình huống một chuyến xe buýt thường tới trạm trễ, nhưng không quá 10 *phút, và đợi ở trạm* 5 *phút. Hàm mật độ xác suất của giờ xe tới trạm, gọi là X, được cho bởi*

$$f_1(x) = -0{,}02x + 0{,}2, \quad 0 \le x \le 10.$$

Một người thường đi xe buýt vào giờ này nhưng hay bị trễ, có khi tới 20 *phút. Hàm mật độ xác suất của giờ người này tới trạm, gọi là Y, được cho bởi*

$$f_2(y) = -0{,}005y + 0{,}1, \quad 0 \le y \le 20.$$

Hỏi xác suất để người này đón được chuyến xe buýt này là bao nhiêu? Tính giá trị trung bình thời điểm xe đến trạm và giá trị trung bình thời điểm người đến trạm.

Vì hai biến xác suất là độc lập, nên hàm phân bố xác suất chung là

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$
$$= \begin{cases} (-0{,}02x+0{,}2)(-0{,}005y+0{,}1), & \text{nếu } 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 20, \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tiếp theo, ta xác định điều kiện để người này đón được xe buýt. Xe (biến X) có thể đợi ở trạm 5 phút, nên người này (biến Y) cần đến trước thời gian này, tức là $Y \le X + 5$.

Vì xe không đến trễ quá 10 phút, nên $X \le 10$.

Như vậy, xác suất cần tìm là:

$$\begin{aligned} P(Y \leq X + 5) &= \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 10,\, 0 \leq y \leq x+5\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{10} \int_0^{x+5} (-0{,}02x + 0{,}2)(-0{,}005y + 0{,}1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\approx 0{,}65, \end{aligned}$$

nghĩa là xác suất để người này đón được xe buýt là 65%.

Trung bình thời điểm xe đến trạm là:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \iint_{0\le x\le 10,\, 0\le y\le 20} x f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{10}\int_0^{20} x(-0{,}02x+0{,}2)(-0{,}005y+0{,}1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^{10} x(-0{,}02x+0{,}2)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{20}(-0{,}005y+0{,}1)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{10}{3}\cdot 1 = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

Trung bình thời điểm người đến trạm là:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \iint_{0\le x\le 10,\, 0\le y\le 20} y f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{10}\int_0^{20} y(-0{,}02x+0{,}2)(-0{,}005y+0{,}1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^{10}(-0{,}02x+0{,}2)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{20} y(-0{,}005y+0{,}1)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 1\cdot\frac{20}{3} = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$



Ví dụ

Hàm mật độ xác suất của hai biến ngẫu nhiên X và Y có dạng

$$f(x,y) = cxe^{-y}, \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

(a) Tìm giá trị của hằng số c.

(b) Tính giá trị kỳ vọng $E(X)$ của biến ngẫu nhiên X.

(c) Tính giá trị kỳ vọng $E(Y)$ của biến ngẫu nhiên Y.

(d) Tính xác suất biến X có giá trị giữa 0 và $\frac{1}{2}$; và biến Y có giá trị giữa 0 và $\frac{1}{3}$.

Tìm giá trị của hằng số c.

Điều kiện để f là hàm mật độ xác suất thì tích phân của f bằng 1. Ta có:

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_0^1 cxe^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= c\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 e^{-y}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= c\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-1}\right), \end{aligned}$$

nên $c = \frac{2}{1-e^{-1}}$.

Tính giá trị kỳ vọng $E(X)$ của biến ngẫu nhiên X.

Giá trị kỳ vọng $E(X)$ của biến X là:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} x f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^1 c x^2 e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= c\left(\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 e^{-y}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= c\frac{1}{3}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Tính giá trị kỳ vọng $E(Y)$ của biến ngẫu nhiên Y.

Giá trị kỳ vọng $E(Y)$ của biến Y là:

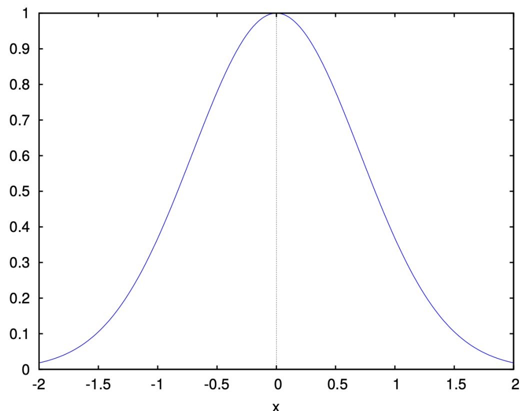
$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} y f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^1 cxye^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= c\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 ye^{-y}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{c}{2}\int_0^1 ye^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{c}{2}\left(1-2e^{-1}\right) = \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Tính xác suất biến X có giá trị giữa 0 và $\frac{1}{2}$; và biến Y có giá trị giữa 0 và $\frac{1}{3}$.

Xác suất cần tìm là:

$$\begin{aligned}
P\left(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{3}\right) &= \iint_{[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{3}]} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \iint_{[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{3}]} cxe^{-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= c\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-y}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{c}{4}\left(1-e^{-1/3}\right) = \frac{1-e^{-1/3}}{2\left(1-e^{-1}\right)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Tính tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$



Hình: Đường cong e^{-x^2} còn được gọi là đường hình chuông (bell curve, bell-shaped function).

Ta tính tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

thông qua việc tính tích phân bội. Gọi $I(R)$ là một hình vuông tâm O với chiều dài cạnh $2R$:

$$I(R) = [-R, R] \times [-R, R].$$

Công thức Fubini cho ta

$$\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

nên

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Gọi $B'(R)$ là hình tròn đóng tâm O với bán kính R:

$$B'(R) := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}.$$

Ta dễ dàng thấy được $B'(R) \subset I(R) \subset B'(R\sqrt{2})$, nên

$$\iint\limits_{B'(R)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A \leq \iint\limits_{I(R)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A \leq \iint\limits_{B'(R\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A.$$

Sử dụng tọa độ cực, ta tính được:

$$\iint_{B'(R)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=R} = \pi - \pi e^{-R^2}.$$

Lấy giới hạn, ta được

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{B'(R)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A = \pi.$$

Tương tự, ta cũng tính được

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{B'(R\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A = \lim_{R\to\infty} \left(\pi - \pi e^{-2R^2}\right) = \pi.$$

Như vậy, sử dụng định lý kẹp, ta kết luận được

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A &= \lim_{R\to\infty} \iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A \\ &= \lim_{R\to\infty} \iint_{B'(R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A = \pi.\end{aligned}$$

Sử dụng công thức Fubini, ta có:

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y,$$

Vì vậy,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \right)^2 = \pi,$$

nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Ví dụ: Phân bố chuẩn

Đặt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Tính tích phân*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, nên $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$. Thay vào tích phân để có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1. \qquad \square$$

Hàm $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ được gọi là hàm phân bố chuẩn (standard distribution).

Ví dụ

Tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x.$$

Tích phân đã cho được viết lại thành:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x = e\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $u = x - 1$, và ta được

$$I = e\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = e\sqrt{\pi}.$$



Ôn tập 1

Câu 1. Cho $D = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ và $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y + xy^2, & y = x^2, \\ \dfrac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, & y \neq x^2. \end{cases}$$

(a) Chứng tỏ f khả tích trên D.

(b) Tính $\iint_D f$. Làm tròn kết quả đến 3 chữ số thập phân.

Câu 2. Cho miền phẳng D nằm trong góc phần tư thứ nhất, bên ngoài hình tròn $x^2 + y^2 \leq 9y$ và bên trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 3x\sqrt{3}$.

(a) Chứng tỏ miền D có diện tích.

(b) Tính diện tích của D.

Câu 3. Phác họa miền E và tính tích phân $\iiint_E z\,\mathrm{d}V$, trong đó E là miền bị chặn bởi mặt phẳng Oxy, mặt cong $x^2 + 4y^2 = 4$, và mặt phẳng $z = x + 2$.

Câu 4. Tính tích phân $\iint_D e^{x+y}\,\mathrm{d}A$, trong đó D là miền $|x| + |y| \leq 1$.

Ôn tập 2

Câu 5. Một mũi khoan hình trụ có bán kính a được sử dụng để khoan xuyên qua tâm quả cầu bán kính b với $a < b$. Tính thể tích phần còn lại bên trong quả cầu.

Câu 6. Cho miền E nằm bên dưới mặt phẳng $z = 2y$ và bên trên miền D trong mặt phẳng Oxy bị chặn bởi đồ thị của $y = |x|$ và $y = 2$. Tính thể tích của E bằng hai cách:

(a) Thiết lập tích phân bội ba.

(b) Sử dụng phương pháp cắt lớp.

Câu 7. Cho $E \subset \mathbb{R}^3$ là miền bị chặn bởi đồ thị của $y = 0$, $y = 2$, $y + z = 3$, và $z = x^2$. Biểu diễn tích phân $\iiint_E f$ theo ba thứ tự: $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, và $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$.

Câu 8. Tìm miền E sao cho $\iiint_E (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\,\mathrm{d}V$ đạt cực tiểu.

Câu 9. Cho hàm f mang giá trị thực, liên tục trên $[0, 1]$. Chứng tỏ:

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^3.$$

Giải mẫu Câu 1a

Hàm $y = x^2$ liên tục trên $[0, 1]$ nên khả tích trên $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Vì vậy, đồ thị (C) của $y = x^2$ có diện tích không trong $D \subset \mathbb{R}^2$. Ngoài ra, $f(x, y) = x^2y + xy^2$ liên tục trên tập compắc $\{(x, y) \,|\, y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ nên bị chặn.

Khi $y \neq x^2$, ta thấy $f(x, y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, một hàm sơ cấp nên liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}^2$. Vì D compắc nên f bị chặn. Do đó, hàm $f(x, y)$ liên tục trên D trừ ra tập C có diện tích không nên khả tích trên D.

Giải mẫu câu 2a

Trong tọa độ cực, ta có

- Phương trình $x^2 + y^2 = 9y$ trở thành $r = 9\sin(\theta)$;
- Phương trình $x^2 + y^2 = 3x\sqrt{3}$ trở thành $r = 3\sqrt{3}\cos(\theta)$.

Giao điểm của hai đường này là $r = 0$ và $(r, \theta) = \left(\frac{9}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$. Biên của D gồm:

- Một phần đường tròn $r = 9\sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, là đồ thị của hàm liên tục, khả tích trong $\mathbb{R}$, nên có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.
- Một phần đường tròn $r = 3\sqrt{3}\cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, là đồ thị của hàm liên tục, khả tích trong $\mathbb{R}$, nên có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.
- Một phần trục x từ 0 đến $3\sqrt{3}$ có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.

Vì vậy, ∂D có diện tích không và miền D bị chặn, có diện tích.